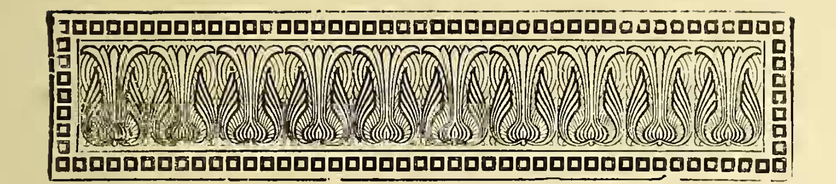


REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFERENCIACION

POR

CARLOS WARGNY

(*Continuacion*)

I.—CONOCIMIENTOS PRELIMINARES

5. Valores límites de una fracción.—Los términos del desarrollo de $\sqrt{2}$ son fraccionarios, de la forma $1 : n$, en la que n va aumentando de valor, de término en término; y, en consecuencia, las fracciones disminuyen, como lo manifiestan los números decimales correspondientes.

Podemos admitir, según esto, que si el denominador es infinitamente grande o infinito (∞), la fracción será infinita-

mente pequeña o cero (0), relación que se indica por la igualdad $\frac{1}{\infty}=0$.

Sin embargo, es más correcto, porque es más general, expresar la misma idea diciendo que la fracción $1:n$ TIENDE A CERO ($\longrightarrow 0$), cuando n TIENDE AL INFINITO ($\longrightarrow \infty$), lo que simbólicamente se denota así:

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \atop {n \longrightarrow \infty}$$

y se lee: «1 : n tiende a cero cuando n tiende al infinito».

En este caso el denominador n es una variable que pasa por todos los valores sucesivos posibles. Podemos decir aún que cuando $n \longrightarrow \infty$, la fracción $1:n$ adquiere un valor llamado LÍMITE y que es igual a CERO; y esta otra manera de enunciar la misma idea anterior, se denota escribiendo:

$$\lim_{n \longrightarrow} \text{.} \ (1:n)=0$$

Análogamente, si n disminuye indefinidamente, la fracción $1:n$ aumenta también indefinidamente, es decir,

$$\lim_{n \longrightarrow 0} \text{.} \ (1:n)=\infty$$

6. **Límite de una función exponencial.**—Hagamos variar el valor de n en la función exponencial

$$f(n)=\left(1 \qquad \frac{1}{n}\right)^n,$$

haciendo sucesivamente:

$f(1)=1+1$	$=2$	$=2$
$f(2)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	$=\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$=2{,}25$
$f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	$=\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$=2{,}37$
$f(5)=\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	$=\left(\frac{6}{5}\right)^5$	$=2{,}428$
$f(10)=1+1:10)^{10}$	$=\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$	$=2{,}5937$
$f(10^2)=(1+1:10^2)^{100}$	$=\left(\frac{101}{100}\right)^{100}$	$=2{,}7048$
$f(10^3)=(1+1:10^3)^{1000}$	$=\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}$	$=2{,}7169$
$f(10^4)=(1+1:10^4)^{10000}$		$=2{,}7181$
$f(10^5)=(1+1:10^5)^{100000}$		$=2{,}7182$

A medida que la variable n crece, la función $(1+1:n)^n$ también crece; y, sin dificultad se concluye que si la variable n aumenta indefinidamente o tiende al infinito ($\rightarrow \infty$), el valor de la función TIENDE A UN LÍMITE igual a 2,7182...

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1:n)^n = 2{,}7182\ldots$$

El valor de este límite se calcula en seguida con toda exactitud.

7. Cálculo de e.—Conforme al Binonio de Newton desarrollemos la potencia anterior.

$$(1+1:n)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^5}+\ldots$$

Efectuemos la división de la variable n.

$$(1+1:n)^n = 1+1+\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}}{2!}+\frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}}{3!}+\cdots$$

$$=2+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots$$

Si suponemos ahora que n aumenta indefinidamente o tiende al infinito ($\to\infty$), $1:n$ se reduce o iguala a cero $=0$ lo mismo que $2:n$, $3:n\ldots$; y la función adquiere un valor límite.

$$\lim_{n\to\infty}.(1+1:n)^n = 2 = \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Siendo $\frac{1}{2!}=0{,}5$, si dividimos este decimal por 3, se obtiene $\frac{1}{3!}=0{,}166\ldots$; si dividimos este nuevo decimal por 4, obtendremos $\frac{1}{4!}=0.041\ldots$ y así sucesivamente. La suma de todos estos decimales nos da el valor del límite, que se designa por e y que es la base de los logaritmos naturales (**L**).

$$\lim_{n\to\infty}.(1+1:n)^n = e = 2{,}718\ 281\ 828\ldots$$

8. Límite de otra función.—Supongamos n fraccionario; tendremos

$$(1+n)^{1:n}=1+\frac{1}{n}n+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!}n^2+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{3!}n^3+\cdots$$

$$=1+1+\frac{\frac{n}{n}(1-n)}{2!}+\frac{\frac{n}{n}(1-n)(1-2n)}{3!}+\cdots$$

$$=2+\frac{1-n}{2!}+\frac{(-n)(1-2n)}{2!}+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{3!}+\cdots$$

Ahora bien, cuando la variable n disminuye indefinidamente o tiende a cero($\rightarrow 0$), la función $(1-n)^{1:n}$ tiende al mismo límite anterior e:

$$\lim_{n\rightarrow 0}.\ (1+n)^{1:n}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

9. Cantidades infinitesimales.—Si en la función exponencial anterior

$$f(n)=(1+n)^{1:n},$$

hacemos $n=0$, se obtiene

$$f(0)=(1+0)^{1:0}=1^{\infty};$$

este valor, como se sabrá más adelante, es INDETERMINADO. Se ve que no es lo mismo suponer $n=0$ que $n\rightarrow 0$. Por esta razón, y a fin de hacer desaparecer la indeterminación, para poder calcular el valor de e, se ha tenido que suponer que n es una variable que tiende a cero y se le ha dado el nombre de INFINITAMENTE PEQUEÑO O INFINITESIMAL. Luego,

UNA INFINITESIMAL ES UNA CANTIDAD VARIABLE QUE TIENDE A CERO, SIN ALCANZAR JAMÁS ESTE VALOR.

Se representa por dn, que se lee «diferencial de n» y goza de las propiedades siguientes:

1.ª Una cantidad finita no altera si se le agrega una infinitesimal: $a+dn=a$.

Esta propiedad es análoga a $a+\text{cero}=a$.

2.ª La proporción $1:dn=dn:y$, nos dice que si dn es infinitesimal respecto de 1, y lo será respecto de dn; luego,

$$y=dn^2$$

En consecuencia, según lo anterior

$$dn+dn^2=dn.$$

dn es una infinitesimal de primer orden; dx^2 es de segundo orden, lo mismo que $dx.dy$; dx^3 es de tercer orden.

3.ª El producto de una cantidad finita por una infinitesimal no altera su orden; dn y adn son del mismo orden, lo mismo que $\frac{dn}{a}=\frac{1}{a}dn$.

La inversa de dn tiende al infinito.

$$\frac{1}{dn}\rightarrow\infty$$

Como complemento de lo anterior, damos los detalles que siguen:

Desde el siglo XVII el término *infinitamente pequeño* ha tenido tres acepciones diferentes:

1.ª Para Kepler, Cavalieri, Wallis y Euler, un infinitamente pequeño es una cantidad inferior a toda cantidad dada, por pequeña que sea, y es considerada como nula. Se llama *infinitamente pequeño nulo*;

2.ª Juan Bernoulli, L'Hospital y Poisson creen que los infinitamente pequeños son diferentes de cero e inferiores a toda cantidad, lo que es un contrasentido, porque cero es el único valor inferior a toda cantidad dada. Se llaman *seudo-infinitesimales* («Mathesis», 1888, p. 149).

3.ª Fermat, Roberval, Pascal, Newton, Leibniz y Cauchy consideran que una cantidad infinitesimal es una cantidad variable cuyo límite es cero. Se llama *indefinidamente pequeño.* A pesar de todo, estos mismos autores emplean estas cantidades como infinitesimales nulos. La definición siguiente es la más aceptada: un infinitamente pequeño es una variable que puede llegar a ser y quedar inferior a una cantidad dada tan pequeña como se quiera.

Las ideas de límite y de infinitamente pequeño son equivalentes. Véase la obra de Mr. Paul Mansion, *Résumé du Cours d'Analyse Infinitesimale de l'Université de Gand.*

10. Logaritmos naturales.—Ya se dijo en el N.º 2 que de la potencia $e^x = n$ salen los logaritmos naturales o de base e:

$$x = \mathrm{L}n.$$

Sabemos que $\mathrm{L}e = 1$, $\mathrm{L}1 = 0$, $\mathrm{L}0 = -\infty$; y además:

$$\mathrm{L}(a.b) = \mathrm{L}a + \mathrm{L}b; \quad \mathrm{L}(a:b) = \mathrm{L}a - \mathrm{L}b;$$

$$\mathrm{L}(a^n) = n\mathrm{L}a; \quad \mathrm{L}(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\mathrm{L}a$$

Calculemos ahora el límite de

$$\frac{\mathrm{L}(1+n)}{n} \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Para esto se escribe

$$\frac{\mathrm{L}(1+n)}{n} = \mathrm{L}(1+n)^{\frac{1}{n}}.$$

Ahora bien, si n tiende a cero, en el N.º 8 se vió que $(1+n)^{\frac{1}{n}}$ tiende a e; luego,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathrm{L}(1+n)}{n} = \mathrm{L}e = 1$$

Sentado esto, tendremos sucesivamente:

$$\mathbf{L}(a+b)=\mathbf{L}\left[a\left(1+\frac{b}{n}\right)\right]=\mathbf{L}a+\mathbf{L}(1+b:a)$$

$$\therefore\ \mathbf{L}(a+b)-\mathbf{L}a=\mathbf{L}\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

Hagamos $\frac{b}{a}=n \ \therefore\ \frac{b}{an}=1$

$$\mathbf{L}\left(1+\frac{b}{a}\right)=\mathbf{L}(1+n)\frac{b}{an}=\frac{1}{n}\ \mathbf{L}(1+n)\frac{b}{a}$$

$$=\mathbf{L}(1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{b}{a}.$$

Si $\longrightarrow n0$, $(1+)n^{1:n}$ adquiere el valor límite e, y como $\mathbf{L}e=1$, el último miembro se reduce a $\frac{b}{a}$.

Observación general.—Como ya se vió en el N.º 2, la aplicación de los logaritmos convierte las funciones monomias en funciones polimonias; de modo que **L** es un signo de descomposición.

II. FUNCIONES ALGEBRAICAS

11. Variaciones de una función.—VARIABLE es toda cantidad que puede tomar un número indefinido de valores diferentes; se designa por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v, t.

CONSTANTE es una cantidad que tiene un valor fijo; se designa por las primeras letras: a, b, $c \ldots m$, n, p, q.

Los números, π, e, L2, $i=\sqrt{-1}$ son cantidades constantes. En la expresión $ax+b$ hay que distinguir el COEFICIENTE CONSTANTE a, del TÉRMINO CONSTANTE b, que es independiente de la variable.

FUNCIÓN es la relación de dependencia que hay entre dos o más variables.

En la ecuación exponencial del N.º 6, que se escribe

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

x es la variable INDEPENDIENTE, y es la variable DEPENDIENTE o la función.

Se dice que y es función de x cuando a cada valor de x corresponde un valor determinado de y. Una función se denota también así.

$$y=f(x) \quad \text{o} \quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Consideremos la función más sencilla

$$y = ax^2$$

o bien,

$$f(x)=ax^2.$$

Los valores diferentes que puede adquirir y cuando x varía, constituyen las VARIACIONES DE LA FUNCIÓN $f(x)$, y pueden ser de dos clases.

1.ª POR VALORES SUCESIVOS (N.º 6).

sea	$x=0$,	se obtiene,	$f(0)=0$
	1		$f(1)=a$
	2		$f(2)=4a$
	...		.....
	10		$f(10)=100a$
	-3		$f(-3)=9a$
	$\frac{1}{4}$		$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}a$
	a		$f(a)=a^3$
	etc.		

se ve claramente que los valores de y o $f(x)$ dependen de los atribuídos a x, y que x es la variable independiente, mientras que y es la dependiente o la función.

Cuando una variable puede pasar por todos los valores SUCESIVOS comprendidos entre a y b, su variación es CONTINUA entre los LÍMITES a y b.

2.ª POR CRECIMIENTOS O INCREMENTOS.—Si, en la misma función ax^2, aumentamos el valor de x en una unidad, y aumentará en cierta cantidad $\triangle y$.

$$y+\triangle y=a(x+1)^2$$

$$=ax^2+2ax+a$$

Restemos la función primitiva $y=ax^2$; se obtiene el valor de $\triangle y$,

$$\triangle y=2ax+a$$

Supongamos, ahora, que el crecimiento de x es cualquiera cantidad, tal como $\triangle x$; tendremos.

$$y+\triangle y=a(x+\triangle x)^2$$
$$=ax^2+2ax.\triangle x+a.\triangle x^2.$$

Restemos la función primitiva $y=ax^2$:

$$\triangle y=2ax.\ \triangle x+a.\ \triangle x^2.$$

12. Razón de los crecimientos.—Dividamos por el crecimiento $\triangle x$:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=2ax+a.\triangle x.$$

La comparación por división del crecimiento $\triangle y$ de la función con el crecimiento $\triangle x$ de la variable toma el nombre particular de RAZÓN DE LOS CRECIMIENTOS.

13. Límite de la razón de los crecimientos.—Supongamos que $\triangle x$ disminuye indefinidamente o tiende a cero $\rightarrow(0)$. El término $a.\triangle x$ se reduce a cero y la razón adquiere un valor especial llamado LÍMITE:

$$\lim_{\triangle x\rightarrow 0}.\frac{\triangle y}{\triangle x}=2ax$$

Obsérvese que no podemos suponer $\triangle x=0$, porque entonces sería también $\triangle y=0$; y la razón de los crecimientos tendría la forma indeterminada $0:0$. Además, si $\triangle x=0$, la función no tendría entonces variación. Lo correcto es decir que $\triangle \to x0$.

14. **Derivada**.—El valor del límite que se acaba de calcular, o sea $2ax$, tiene una importancia capital en nuestro estudio y se llama DERIVADA, porque se deriva o deduce de la función primitiva $f(x)=ax^2$. La derivada se designa por $f'(x)$ o por y'.

Tendremos, según esto, que

$$\text{de } f(x)=ax^2 \text{ se deduce } f'(x)=2ax.$$

La operación de derivar o DERIVACIÓN se indica por el signo D (derivada de). Por ejemplo, $D(ax^2)=2ax$.

OBSERVACIÓN. Es evidente que una función tiene derivada cuando x tiene variaciones. Pero si la función se reduce a un término constante, como

$$y=a,$$

la derivada será nula, es decir, $f'(x)=0$. De lo cual se deduce que la derivada de un término constante es nula.

En la función polinomia:

$$f(x)=ax+b,$$

las variaciones de $f(x)$ dependen únicamente de x y no de a ni de b, que son constantes.

15. **Diferencial.**—Se facilita notablemente el cálculo anterior del límite de la razón de los crecimientos si empleamos, en vez de $\triangle x$, el crecimiento infinitesimal dx (N.º 9); y dy en vez de $\triangle y$.

Tendremos sucesivamente:

$$y = ax^2$$

$$y + dy = a(x + dx)^2$$

$$= ax^2 + 2axdx + adx^2.$$

Restemos la función primitiva:

$$dy = 2axdx + adx^2.$$

Según el principio 2.º del N.º 9, dx^2 es nulo comparado con dx; luego:

$$dy = 2axdx.$$

Este resultado es la DIFERENCIAL de la función primitiva

$$f(x) = ax^2.$$

Dividiendo la diferencial por dx, se obtiene la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Comparemos las notaciones anteriores:

$$\text{lím. } \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Podemos observar, ahora, que siendo

$$y = ax^2 = f(x),$$

tendremos, en general, la función

$$y = f(x);$$

de la que se deduce la derivada y' o

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

y la diferencial

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

$f'(x)$ es el COEFICIENTE DIFERENCIAL.

Las dos fórmulas anteriores son fundamentales en el Cálculo Infinitesimal.

*Podemos denotar, además, el valor de la derivada en una forma más abstracta y general.

Sea una función cualquiera

$$y=f(x).$$

Creciendo las variables:

$$y+dy=f(x+dx),$$

restando la función primitiva O DIFERENCIANDO:

$$dy=f(x+dx)-f(x),$$

y dividiendo por dx, se obtiene el valor general de la derivada de cualquiera función:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}.$$

16. **La Diferenciación**.—Tiene por objeto encontrar la diferencial de cualquiera función, sin entrar en los detalles de los cálculos intermediarios que acabamos de hacer.

Para indicar esta operación se usa la letra d, que se lee «diferencial de».

Por ejemplo, sea la función

$$y=f(x).$$

Diferenciamos. La operacion INDICAEA es

$$dy=d\ f(x);$$

y la operación EFECTUADA,

$$d\,y = f'\,(x)\,d\,x.$$

Para obtener directa o inmediatamente el valor de $f'\,(x)$, se emplean las reglas que damos en los números 19 y 20.

17. Clasificación de las funciones.—Los funciones se clasifican en SIMPLES y COMPUESTAS.

Cuando la variable está sometida a un solo signo de operación, la función es SIMPLE;y cuando los signos son más de uno, la función es COMPUESTA.

Los signos de operación son de dos clases:

ALGEBRAICOS: $+$, $-$, $\times$, $:$, exponente, $\sqrt{\ }$;
y TRASCENDENTES. log, L, sen, arc sen, d, sh, etc.

Las funciones simples con las siguientes:

- Algebraicas
  - racionales
    - enteras
      - suma $a \pm x$
      - producto $a\,.\,x$
      - potencia x^n
    - fraccionarias $a : x$
  - irracionales $\sqrt{x}$

- trascendentes
  - exponenciales a^x
  - logarítmicas Lx
  - trigonométricas sen$x$
  - circulares arc sen$x$

Además hay otras funciones trascendentes, como son las hiperbólicas, elípticas, abelianas, hiper-elipticas, etc.

Combinando entre sí las formas simples, se construyen las funciones compuestas. Ejemplos:

$$a+bx+cx^2,\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \log \operatorname{sen}\,(1+x^2),$$

$$\text{L}\, a^x - \text{sen}\,(1 - \sqrt{x}).$$

Función EXPLÍCITA es la que tiene despejada una de las variables; $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Se designa por $y = f\,(x)$; IMPLÍCITA, es la que no tiene despejada ninguna variable: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Se designa por $f\,(x, y) = 0$; CONTINUA, es la que tiene un crecimiento infinitesimal cuando la variación de x es también infinitesimal; DISCONTÍNUA, es la que salta bruscamente de un valor finito a otro infinito.

18. Notación de las funciones.—Toda función explícita de una sola variable independiente x, sea simple o compuesta, se denota por

$$y = f\,(x).$$

En vez de la CARACTERÍSTICA f se emplean las letras F, ϕ, f,...

Siendo f un signo de operación, como L, sen, puede reducirse $f\,(x)$ a $f\,x$, sin paréntesis, o a f' sin variable.

La función compuesta de más arriba,

$$y = \text{L}\, a^x - \text{sen}\,(1 - \sqrt{x}),$$

se puede denotar simplemente por

$$y = f\,(x);$$

o, si es necesario, por

$$y = \text{L}\, f\, x - \text{sen}\, F\, x;$$

o mejor, para indicar sólo su forma binomia, por

$$y=u-v,$$

y aquí u y v son FUNCIONES DE x, esto es,

$u=\text{L}\, a^x$, $v=\text{sen}(1-\sqrt{x})$.

Esta será la notación más empleada en el presente estudio: u, v, y, z representan funciones simples o compuestos de x.

Se comprende que siendo $d\,x$ el crecimiento infinitesimal o la diferencial de la variable x, $d\,y$ lo será de y, lo mismo que du de u, y dv de v.

En resúmen, $f\,(x)$, $f'\,(x)$, y' u, v, y, son simples signos de abreviación de funciones más o menos complicadas en que entra la variable independiente x.

Del mismo modo, en vez de operar con el coeficiente compuesto $(\pm\frac{3}{4}\sqrt{2}-5)\,x$, se hace $\pm\frac{3}{4}\sqrt{2}-5=a$ y resulta la función sencilla $a\,x$.

19. Reglas fundamentales.—En los números 11 a 15 se diferenció la función $y=ax^2$, haciendo crecer las variables, buscando en seguida la razón de los crecimientos y determinando por fin el límite de esta razón. Este procedimiento, fundado en la teoría de los límites, es aplicable a toda clase de funciones; y aunque es el único válido, es siempre largo y a veces laborioso y difícil.

Hay que encontrar reglas sencillas y prácticas, que estén al alcance de la mayoría de los estudiantes y que dén inmediatamente la diferencial; y estas son las nueve reglas de diferenciación que damos en seguida.

Las dificultades de la Diferenciación se presentan en las funciones compuestas de x, y es por esta causa que las reglas deben referirse a estas funciones, que hemos representado por u.

Demos a conocer desde luego las tres primeras reglas, consideradas como fundamentales, porque de ellas se deducen fácilmente las seis restantes.

PRIMERA REGLA.—La diferencial de un término constante es nula; es decir,

$$d(a)=o; \qquad (1)$$

lo que es evidente, porque una cantidad constante no tiene variación. Se comprende que toda cantidad independiente de una variable, como a^2, $i=\sqrt{-1}$, La, $\sqrt{a+3}$, $a-2\,b^3$, etc., es constante y su diferencial es nnla.

SEGUNDA REGLA.—La diferencial del logaritmo natural de una función fs igual a la diferencial de la función dividida por la función:

$$d(\mathrm{L}\,u)=\frac{du}{u}. \qquad (2)$$

En efecto, representemos por u toda función de x, y sea

$$y=\mathrm{L}\,u.$$

Creciendo la variable x, el crecimiento de u será $d\,u$ y el de y, será dy (N.º 10):

$$y+dy=\mathrm{L}\,(u+du)=\mathrm{L}\,u+\mathrm{L}\,(1+\frac{du}{a})$$

Restemos la función primitiva:

$$d\,y=\mathrm{L}\,(1+\frac{du}{u})$$

$\frac{du}{u}$ es una infinitesimal de 1.er orden que representamos por

$n \therefore \frac{du}{nu}=1$

Sustituyamos estos valores:

$$d\,y=\text{L}\,(1+n)\frac{du}{nu}=\text{L}\ \ (1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{du}{u};$$

siendo n infinitesimal, se tendrá que

$1+n)^{\frac{1}{n}}=e$, L $e=1$, $d\,y=\frac{du}{u}$; y como $d\,y=d$ L (u), luego,

$$d\,(\text{L}\,u)=\frac{du}{u}.$$

Ejercicio 1. Supongamos $u=x^2$ tendremos;
$y=\text{L}\ x. \therefore dy=d\,(\text{L}\,x)=\frac{dx}{a}$

Este resultado se llama DIFERENCIAL LOGARÍTMICA de x. (Sonnet, 9).

* 2. $y=\text{L}\,(f\,x) \therefore d\,y=\frac{d\,(f\,x)}{f\,x}$; pero $d\,(f\,x)=f'\,x\,d\,x \therefore d\,\text{L}\,x)=\frac{f'\,x}{f\,x}d\,x$ (Timmermans, 27).

TERCERA REGLA.—LA DIFERENCIAL DE UNA SUMA DE FUNCIONES ES IGUAL A LA SUMA DE LAS DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES:

$$d\,(u+v)=d\,u+d\,v \qquad (3)$$

Sea la suma de funciones de x,

$$y = 2x^3 - \sqrt{1+x^2}$$

que representamos, abreviadamente, por

$$y = u + v.$$

Si hacemos crecer la variable x en dx, u crecerá en du, v en dv e y en dy:

$$y + dy = (u + du) + (v + dv);$$

restemos la función primitiva:

$$dy = du + dv:$$

luego, siendo $y = u + v$, tendremos:

$$d(u + v) = du + dv,$$

En otros términos, para diferenciar un polinomio, hay que diferenciar cada uno de sus términos.

Ej. 3. $y = a + x \therefore dy = d(a + x) = da + dx$; pero según Regla I, $da = 0$; $\therefore d(a + x) = dx$.

Todo término constante desaparece en la diferenciación.

4. $y = u - v \therefore d(u - v) = du - dv$.

5. $y = fx - \phi x \therefore dy = dfx - d\phi x = (f'x - \phi' x)\, dx$.

20. Fórmulas usuales.—Apliquemos ahora las tres fórmulas anteriores a las funciones de los textos de Cálculo Diferencial.

A). Signo y coeficiente.—Supongamos que u es una función de x y que está precedida del coeficiente constante a con su respectiva signo, o sea.

$$y = \pm au.$$

Para obtener la diferencial, hacemos $\pm a = m$,

$$y = m\,u$$

y aplicamos logaritmos L:

$$\mathrm{L}\,y = \mathrm{L}\,m + \mathrm{L}\,u.$$

Según la tercera regla,

$$d\,\mathrm{L}\,y = d\,\mathrm{L}\,m. + d\,\mathrm{L}\,u;$$

según la 1.ª, $d\,\mathrm{L}\,m = o$; y según la 2.ª

$$\frac{d\,y}{y} = \frac{d\,u}{u},$$

despejemos y reemplacemos el valor de y:

$$d\,y = m\,u\frac{d\,u}{u} = m\,d\,u.$$

$$\therefore\ d\,(\pm au) = \pm adu.$$

Luego, para diferenciar una función con coeficiente, basta anteponer el coeficiente y su signo al signo d.

Ejercicio 6. Supongamos $a=1$:

$$d\,(\pm u)=\pm d\,u.$$

En la práctica se dice que para diferenciar el signo basta anteponerlo al signo d.

7. Supongamos $u=\pm x$:

$$y=\pm x \therefore d\,y=d\,(\pm x)=\pm d\,x.$$

De lo cual se desprende que la derivada de x es 1.

8. Sea ahora $u=-2\,x$

$$u=-2\,x \therefore d\,u=d\,(-2\,x)=-2\,d\,x$$

9. $u=\dfrac{x}{3}=\frac{1}{3}\,x \therefore d\,u=d\,(\frac{1}{3}\,x)=\frac{1}{3}\,d\,x=\dfrac{d\,x}{3}$.

El coeficiente de $\dfrac{x}{3}$ es $\frac{1}{3}$.

10. $y=(a-b)\,x;\ d\,(a-b)\,x=(a-b)\,d\,x.$

11. $y=a\,f\,x;\ d\,(a\,f\,x)=a\,d\,f\,x=a\,f'\,x\,d\,x.$

12. $y=\pm\frac{1}{3}\,(a+b\,x) \therefore d\,y=\pm\frac{1}{3}\,d\,(a+b\,x)$
$=\pm\frac{1}{3}\,(d\,a+d\,b\,x)=\pm\frac{1}{3}\,b\,d\,x.$

En este ejercicio se aplicó la regla de la suma.

Les principiantes no deben confundir el término constante a con el coeficiente constante a; el primero no tiene diferencial, y el segundo se antepone a d, $d\,(a+a\,x)=d\,a+d\,(a\,x)=a\,d\,x$.

B). POTENCIA. $y=u^n;$

aplico L, $L\,y=n\,L\,u;$

diferencio, $\frac{dy}{y}=n\frac{du}{u};$

despejo, $d\,y=n\,y\frac{du}{u};$

reemplazo, $=n.\,u^n\frac{du}{u};$

simplifico, $=n\,u^{n-1}$

$$\therefore d\,(u^n)=n\,u^{n-1}d\,u \qquad (5)$$

Luego, para diferenciar una potencia, se baja el exponente a coeficiente, se disminuye la potencia en una unidad y se multiplica por la diferencial de la base.

Ejercicio 13. $y=x^2;\ d\,(x^2)=2\,x\,d\,x.$

14. $u=2\,x^3;\ d\,(2\,x^3)=2\,d\,(x^3)=2.3\,x^{3-1}\,d\,x=6\,x^2\,dx.$

Se diferenció primero el coeficiente 2 y después el exponente 3.

15. $u=\frac{3\,x^4}{4};\ d\left(\frac{3\,x^4}{4}\right)=\frac{3}{4}\,d\,(x^4)=3\,x^3\,d\,x.$

16. $y=(f\,x)^n;\ d\,y=n\,(f\,x)^{n-1}\,d\,f\,x=n\,f^{n-1}\,x\,f'\,x\,d\,x.$

*Este es el caso de una función de función.

17. $y=(1+2\,x)^3\ \therefore d\,y=3\,(1+2\,x)^{3-1}\,d\,(1\times 2\,x)$
$=3\,(1+2\,x)^2.\ 2\,x\,d\,x=6\,x\,(1+2\,x)^2\,d\,x.$

En la práctica se dice: primero se diferencia el EXPONENTE y después la BASE.

* 18. $y=(a+b\,x)^n \therefore d\,y=n\,(a+b\,x)^{n-1}\,d\,(a+b\,x)$
$=n\,(a+b\,x)^{n-1}\,b\,d\,x=b\,n\,(a+b\,x)^{n-1}\,d\,x.$

* 19. $d\,(ax^2+b\,x+c)^3=3\,(ax^2+b\,x+c)^2\,d\,(ax^2+bx\quad c)$
$=3\,(ax^2+bx+c)^2\,(2\,ax+b)\,d\,x$

* 20. $d\,(a+b\,x^n)^m=m\,(a+b\,x^n)^{m-1}d\,(a+b\,x^n)$
$=b\,m\,n\,(a+b\,x^n)^{m-1}\,x^{n-1}d\,x.$

Esta regla es la que tiene más aplicación porque comprende la diferenciación de las fracciones y radicales, es decir, de las potencias de exponentes negativos y fraccionarios.

C) FRACCIÓN O EXPONENTE NEGATIVO.

$$y=\frac{1}{u^n}$$

Como se ve, ES LA INVERSA de u^n. Se le dá la forma entera cambiando el signo:

$$y=u^{-n}$$

y se diferencia como potencia:

$$d\,(u^{-n})=-n\,u^{-n-1}\,d\,u$$

Ejercicio 21. $y=\frac{2}{u^2}.\ d\left(\frac{1}{u^2}\right)=d\,(u^{-2})=-2\,u^{-3}\,d\,u$

22. $y=\frac{2}{x3}.\ d\left(\frac{2}{x3}\right)=2\,d\,(x^{-3})=-6\,x^{-4}\,d\,x$

$$23.\ d\left(\frac{a}{b\,x^{10}}\right)=\frac{a}{b}\,d\,(x^{-10})=\frac{10\,a}{b}x^{-11}\,d\,x$$

$$24.\ d\left(\frac{a+b}{x\,n^{-1}}\right)=(a+b)\,d\,(x^{1-n})=ab\,x^{-n}\,d\,x.$$

* La fórmula anterior se puede trasformar en otra con exponente positivo

$$d\left(\frac{1}{u^{n}}\right)=-\frac{n}{u^{n+1}}d\,u,$$

pero su empleo no tiene ventajas sino en las funciones sencillas.

D) Inversa de u $\quad y=\dfrac{1}{u}=u^{-1}$

Se diferencia como potencia:

$$d\,y=-u^{-2}\,d\,u$$

$$\therefore d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u^{2}} \qquad (6)$$

Luego, la diferencial de la inversa de u es igual a MENOS la diferencial de u dividida por el cuadrado de u.

25. $y = \frac{1}{x}$. $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{d\,x}{x^2}$

26. $y = \frac{1}{a+x}$. $d\left(\frac{1}{a+x}\right) = -\frac{\mathrm{d}\,(a+x)}{(a\times x)^2} = -\frac{d\,x}{(a\times x)^2}$

27. $d\left(\frac{2}{3-5x}\right) = -2\,\frac{d\,(3-5\,x)}{(3-5x)^2} = 10\frac{d\;x}{(3-5\,x)^2}$

(*Continuará*)